

ALGORITMI PER L'INVERSIONE ACUSTICA MULTICANALE IN AMBIENTI REALI

Danilo Comminiello, Raffaele Parisi, Michele Scarpiniti, Aurelio Uncini

Dipartimento dell'Informazione, Elettronica e delle Telecomunicazioni
Università di Roma "La Sapienza"
Vie Eudossiana, 18, Roma

Sommario - Questo lavoro presenta una rivisitazione di alcuni algoritmi di apprendimento di tipo *Least Mean Square* (LMS) per sistemi audio adattativi *multiple-input multiple-output* (MIMO). In particolare, sono introdotte tre forme algebricamente equivalenti di sistemi MIMO, denominate forme composite 1, 2 e 3, che nelle implementazioni di filtri adattativi multicanale consentono una maggiore flessibilità nella scrittura degli algoritmi e un'ottimizzazione nell'uso delle risorse computazionali. La seconda parte del lavoro è orientata all'implementazione di sistemi adattativi con apprendimento ritardato, ovvero in presenza di un disallineamento temporale tra i segnali di riferimento e l'uscita del sistema MIMO. Tale situazione è piuttosto tipica nelle applicazioni audio reali come nell'equalizzazione adattativa di sistemi audio o nei sistemi per la cancellazione attiva di rumore, in cui il segnale di riferimento è posto a valle del percorso acustico che si intende controllare. In particolare, sono rivisitati gli algoritmi multicanale *Filtered-X LMS* nelle forme composite 1-3 e nella forma con rete aggiunta (*Adjoint LMS*).

1. Introduzione

I sistemi adattativi *multiple-input multiple-output* (MIMO) sono ormai divenuti di uso comune negli impianti di ascolto professionale multi utente (cinema, auditori ecc) in cui l'accurata riproduzione del campo acustico rappresenta un complesso problema di equalizzazione multi punto [1], [2], [9]; nelle comunicazioni immersive, tipicamente nella cancellazione dell'eco acustica multicanale [3]; nelle tecniche di ricostruzione del campo acustico (*wave field synthesis*(WFS)) [4]-[7]; nella cancellazione della distorsione di *cross-talk* [10] e nel controllo attivo del rumore [11], [17], [20], [21].

La soluzione esatta del problema dell'inversione della funzione di trasferimento acustica (FTA) risulta essere difficile e, in genere, calcolabile solo in certe condizioni e non per tutte le frequenze [1]-[3] (vedi, per esempio, il *multi-input multi-output inverse theorem* (MINT), introdotto da Miyoshi e Kaneda [27], che indica alcune condizioni necessarie e sufficienti per la invertibilità dalla FTA. Normalmente alla soluzione esatta si preferisce una soluzione approssimata statisticamente, o tramite processi di regolarizzazione, con metodi ai minimi quadrati (o altre norme) e calcolata in modalità adattativa. L'approccio adattativo, oltre a consentire un'implementazione ricorsiva e, volendo, in tempo reale, è dotato di proprietà di inseguimento molto utili nei sistemi reali che sono, il più delle volte, anche tempo varianti. Per esempio, nella cancellazione dell'eco o nei sistemi per la cancellazione di retroazione acustica (*feedback destroyers*), in cui la posizione spaziale delle sorgenti può cambiare nel tempo, la proprietà d'inseguimento risulta essere di centrale importanza.

Lo scopo di questo lavoro è di presentare alcune forme algebricamente equivalenti, denominate *notazioni composite*, usate per la descrizione formale di sistemi MIMO. A differenza del caso *Single-Input Single-Output* (SISO), in cui tali notazioni sono prive di significato, nei casi MIMO, come descritto nel seguito, l'uso di una notazione piuttosto che l'altra conduce ad un differente sviluppo delle equazioni e a diverse condizioni necessarie per la corretta implementazione degli algoritmi di adattamento.

2. Notazione e convenzioni

Consideriamo il filtro FIR adattativo illustrato in Figura 1 con un singolo ingresso e una singola uscita o *Single-Input Single-Output* (SISO). Il filtro trasversale ha una risposta impulsiva determinata in modo da stimare il segnale di riferimento che, in questo contesto, prende il nome di *uscita desiderata* indicata con $d[n]$. Il legame tra ingresso e uscita del filtro è dato dalla convoluzione tempo discreto tra la sequenza d'ingresso $x[n]$ e i coefficienti del filtro $w[n]$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} w[k]x[n-k] = w[n] * x[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{w} \quad (1)$$

dove l'indice M indica la lunghezza del filtro. Detto Ω lo spazio dei parametri liberi, definiamo il vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{M \times 1} \subset \Omega$, come $\mathbf{w} = [w[0] \ \cdots \ w[M-1]]^T$, contenente i coefficienti della risposta impulsiva del filtro all'istante n . Analogamente, detto X lo spazio del segnale, definiamo il vettore d'ingresso $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{M \times 1} \subset X$, come $\mathbf{x} = [x[n] \ \cdots \ x[n-M+1]]^T$, ovvero il vettore della finestra di segnale lungo la *delay-line* in ingresso al filtro.

Per la definizione di algoritmi ricorsivi potrebbe essere necessario indicare espressamente un indice temporale. È possibile, allora, aggiungere alle precedenti definizioni un pedice n relativo al passo di aggiornamento dei coefficienti. Per cui, indicando con $\Delta \mathbf{w}_n$ la variazione dei coefficienti (calcolata secondo qualche legge descritta nel seguito), possiamo scrivere $\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_{n-1} + \Delta \mathbf{w}_n$; nel caso del segnale d'ingresso \mathbf{x} l'indice n , è relativo alla finestra temporale del segnale d'ingresso. Per esempio possiamo scrivere $\mathbf{x}_n = [x[n] \ \cdots \ x[n-M+1]]^T$, $\mathbf{x}_{n-1} = [x[n-1] \ \cdots \ x[n-M]]^T$, ..., e nel caso di assenza di indice vale la convenzione $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_n$. Il vettore \mathbf{x} è indicato anche come *vettore regressione d'ingresso* o semplicemente *vettore d'ingresso*.

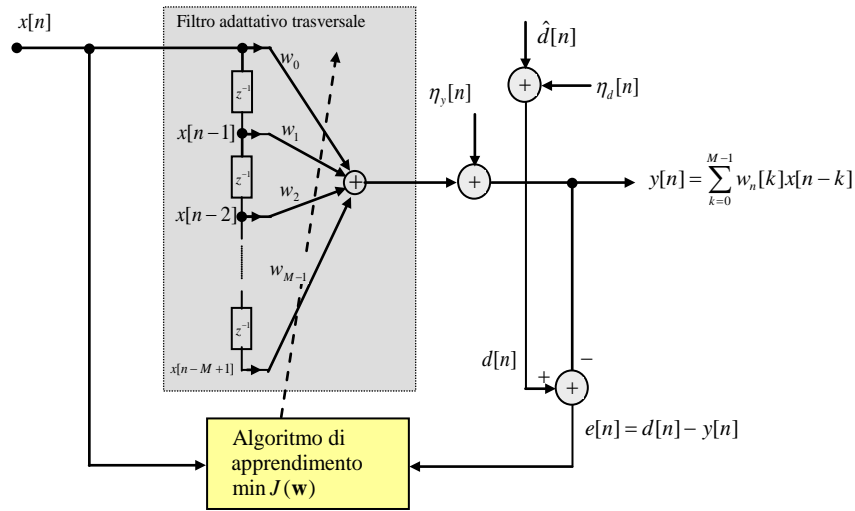


Figura 1 Filtro FIR adattativo lineare detto anche *filtro adattativo trasversale*.

Senza perdita di generalità, è possibile pensare le sequenze d'uscita e di riferimento corrotte da rumore additivo indicato, rispettivamente, come $\eta_y[n]$ e $\eta_d[n]$. Tale rumore è in genere di tipo additivo bianco con caratteristica Gaussiana, spesso indicato anche come *White Gaussian Noise* (WGN), a media nulla e non correlato con il segnale d'ingresso, caratterizzato dalla sua varianza σ_η^2 (o potenza) e indicato come $\eta[n] \triangleq (\sigma_\eta^2, \langle \eta[n] \rangle)$. Nel seguito, dove non espressamente indicato, tale rumore è assunto nullo.

2.1 Notazione multi ingresso-uscita

Estendiamo la notazione al caso multicanale o *Multiple-Input Multiple-Output* (MIMO) considerando un sistema a P ingressi (microfoni) e Q uscite (altoparlanti). Indicando con \mathbf{w}_{ij}

$$\mathbf{w}_{ij} \in \mathbb{R}^{(M \times 1)} \triangleq [w_{ij}[0] \ \cdots \ w_{ij}[M-1]]^T, \quad i = 1, 2, \dots, Q; \quad j = 1, 2, \dots, P \quad (2)$$

i vettori delle risposte impulsive, supposte tutte di identica lunghezza M , tra il j -esimo ingresso e la i -esima uscita e con

$$\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^{(M \times 1)} \triangleq [x_j[n] \ \cdots \ x_j[n-M+1]]^T, \quad j = 1, 2, \dots, P \quad (3)$$

le regressioni d'ingresso presenti sulle sua linee di ritardo dei filtri \mathbf{w}_{ij} per $i = 1, 2, \dots, P$; per le Q uscite, all'istante n , possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
y_1[n] &= \mathbf{w}_{11}^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{w}_{12}^T \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{w}_{1P}^T \mathbf{x}_P \\
y_2[n] &= \mathbf{w}_{21}^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{w}_{22}^T \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{w}_{2P}^T \mathbf{x}_P \\
&\vdots \\
y_Q[n] &= \mathbf{w}_{Q1}^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{w}_{Q2}^T \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{w}_{QP}^T \mathbf{x}_P.
\end{aligned} \tag{4}$$

2.2 Filtro MIMO in notazione composita 1

Indicando con $\mathbf{y}[n] \in \mathbb{R}^{(Q \times 1)} = [y_1[n] \ \cdots \ y_Q[n]]^T$ il vettore che rappresenta tutte le uscite del sistema MIMO all'istante n (in gergo *snap-shot* di uscita), l'espressione (4) in notazione compatta, definita come *uscita MIMO in notazione composita 1*, è espressa come

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{W} \mathbf{x} \tag{5}$$

dove la matrice $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{Q \times P(M)}$ è definita come

$$\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{Q \times P(M)} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{11}^T & \mathbf{w}_{12}^T & \cdots & \mathbf{w}_{1P}^T \\ \mathbf{w}_{21}^T & \mathbf{w}_{22}^T & \cdots & \mathbf{w}_{2P}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{w}_{Q1}^T & \mathbf{w}_{Q2}^T & \cdots & \mathbf{w}_{QP}^T \end{bmatrix}_{Q \times P} . \tag{6}$$

con la notazione $P(M) \times Q$ indichiamo una matrice partizionata $P \times Q$ dove ogni elemento della partizione è un vettore riga $\mathbf{w}_{ji}^T \in \mathbb{R}^{1 \times M}$. Nella (5), il vettore \mathbf{x} , detto *ingresso composito* o *regressione composita*, è definito come

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{P(M) \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_P \end{bmatrix}_{P \times 1} = [\mathbf{x}_1^T \ \cdots \ \mathbf{x}_P^T]^T \tag{7}$$

Il vettore \mathbf{x} di lunghezza PM contiene tutti gli ingressi all'istante n ($\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_n$), ovvero \mathbf{x} è formato dalle regressioni $\mathbf{x}_{i,n}$, tutte incolonnate, per $i = 1, \dots, P$.

2.3 Filtro MIMO in notazione composita 2

Definendo il vettore

$$\mathbf{w}_{j\cdot}^T \in \mathbb{R}^{1 \times P(M)} \triangleq [\mathbf{w}_{j1}^T \ \cdots \ \mathbf{w}_{jP}^T] \tag{8}$$

ossia, la j -esima riga della matrice \mathbf{W} , e il *vettore composito dei pesi* \mathbf{w} costruito con tutti i vettori $\mathbf{w}_{j\cdot}^T$ per $j = 1, 2, \dots, Q$; per cui vale

$$\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{(PM)Q \times 1} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{1\cdot} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{Q\cdot} \end{bmatrix}_{Q \times 1} \tag{9}$$

in altri termini \mathbf{w} è formato da tutte le righe della matrice \mathbf{W} incolonnate, ovvero $\mathbf{w} = \text{vec}(\mathbf{W})$.

Definiamo la matrice composita dei dati $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{Q(PM) \times Q}$ come

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{(PM)Q \times Q} = \mathbf{I}_{Q \times Q} \odot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{x} \end{bmatrix}_{Q \times Q} \tag{10}$$

dove con il simbolo \odot si indica il prodotto di Kronecker (moltiplicazioni dei vettori punto-punto).

Dalle definizioni (9) e (10) è possibile esprimere l'uscita come (vedi [10])

$$\mathbf{y}[n] = (\mathbf{I} \odot \mathbf{x})^T \text{vec}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x}^T & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{x}^T \end{bmatrix}_{Q \times Q} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_Q \end{bmatrix}_{Q \times 1} = \mathbf{X}^T \mathbf{w}. \quad (11)$$

Si osservi che la moltiplicazione con elementi nulli della matrice \mathbf{X}^T può essere evitata implementando la notazione composta 2 come

$$\mathbf{y}[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T \mathbf{w}_Q \end{bmatrix}_{Q \times 1} = \mathbf{x}^T \odot \mathbf{w}. \quad (12)$$

In altri termini, gli elementi del vettore $\mathbf{y}[n]$ sono definiti dalle convoluzioni descritte dalla seguente espressione

$$y_j[n] = \mathbf{x}^T \mathbf{w}_j \quad \text{per} \quad j = 1, 2, \dots, Q. \quad (13)$$

Da un punto di vista puramente algebrico, è ovvio che il formalismo MIMO nelle forme composte 1 e 2, definito dalle (5) e (11), risulti del tutto equivalente; si osservi però che per alcuni sviluppi nel seguito è più conveniente usare l'uno piuttosto che l'altro.

L'espressione (13), relativamente alla j -esima uscita, può essere interpretata come un banco di P filtri dove per ogni canale di uscita risulta infatti

$$y_j[n] = \mathbf{w}_j^T \mathbf{x} = \sum_{k=1}^P \mathbf{w}_{jk}^T \mathbf{x}_k. \quad (14)$$

Il FA MIMO può essere interpretato come il parallelo di Q banchi filtri *Multiple-Input Single-Output* (MISO) a P canali ognuno dei quali è caratterizzato dal vettore pesi \mathbf{w}_j .

2.4 Filtro MIMO in notazione *snap-shot* o composta 3

Definiamo il vettore $\mathbf{w}_j[k]$

$$\mathbf{w}_j[k] \in \mathbb{R}^{P \times 1} = [w_{j1}[k] \quad \cdots \quad w_{jP}[k]]_{P \times 1}^T \quad (15)$$

contenente i tappi dei filtri del j -esimo banco relativi al ritardo k .

In modo analogo definiamo

$$\mathbf{x}[0] \in \mathbb{R}^{P \times 1} = [x_1[0] \quad \cdots \quad x_P[0]]^T \quad (16)$$

il vettore contenente tutti gli ingressi del filtro MISO all'istante n , tale vettore è indicato in gergo come *snap-shot* d'ingresso. Inoltre, definiamo i vettori *snap-shot* $\mathbf{x}[k] \in \mathbb{R}^{P \times 1}$ come i segnali presenti sulle linee dei filtri al k -esimo ritardo; ovvero, riferendoci all'indice temporale n , al segnale $\mathbf{x}[n-k]$.

Con tale formalismo l'uscita del j -esimo canale MISO combinando le (15) e (16) può essere espressa in notazione *snap-shot* come

$$y_j[n] = \sum_{k=0}^{M-1} \mathbf{w}_j^T[k] \mathbf{x}[k] = \sum_{k=0}^{M-1} \mathbf{w}_j^T[k] \mathbf{x}[n-k]. \quad (17)$$

3. Algoritmi LMS multicanale

Per la formulazione dell'algoritmo LMS multicanale, indicando rispettivamente con $(\mathbf{y}[n], \mathbf{d}[n]) \in \mathbb{R}^{Q \times 1}$ lo snapshot dell'uscita e dell'uscita desiderata per il vettore dell'errore a priori $\mathbf{e}[n] \in \mathbb{R}^{Q \times 1}$, considerando la forma composta 1 con la matrice del filtro MIMO all'istante $n-1$, possiamo scrivere

$$\mathbf{e}[n] = \mathbf{d}[n] - \mathbf{y}[n] = \mathbf{d}[n] - \mathbf{W}_{n-1} \mathbf{x}. \quad (18)$$

Per la (6), la matrice dei pesi può essere espressa come $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{Q \times 1(PM)} = [\mathbf{w}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{w}_Q]^T$, la j -esima uscita del sistema può essere scritta come

$$e_j[n] = d_j[n] - \mathbf{x}^T \mathbf{w}_{j_i} \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, Q \quad (19)$$

o, esplicitando tutti i filtri \mathbf{w}_{j_i} , la precedente è equivalente a

$$e_j[n] = d_j[n] - \sum_{i=1}^P \mathbf{x}_i^T \mathbf{w}_{j_i} \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, Q. \quad (20)$$

Per la definizione degli algoritmi LMS multicanale o *Multi-Channel-Least-Mean-Squares* (MC-LMS) possiamo fare riferimento a una delle espressioni dell'errore (18)-(20).

3.1 Adattamento globale

Consideriamo, come primo caso, lo sviluppo con l'espressione vettoriale (18). La funzione costo per l'LMS, derivata dalla approssimazione stocastica del filtro ottimo di Wiener [8] (detto anche *gradiente stocastico*), risulta essere definita come

$$\hat{J}_{n-1}(\mathbf{W}) = \mathbf{e}^T[n] \mathbf{e}[n]. \quad (21)$$

La legge di adattamento per il filtro adattativo MIMO risulta essere definita come $\mathbf{W}_n = \mathbf{W}_{n-1} + \frac{1}{2} \mu [\nabla \hat{J}_{n-1}(\mathbf{W})]$ dove, il *gradiente stocastico* è una matrice $\nabla \hat{J}_{n-1}(\mathbf{W}) \in \mathbb{R}^{Q \times P(M)}$ calcolata differenziando $\hat{J}_{n-1}(\mathbf{W})$ rispetto a \mathbf{W}_{n-1}

$$\nabla \hat{J}_{n-1} = \frac{\partial (\mathbf{e}^T[n] \mathbf{e}[n])}{\partial \mathbf{W}_{n-1}} = -2 \mathbf{e}[n] \mathbf{x}^T \quad (22)$$

e dove con il termine μ si indica il passo di adattamento (che può essere fissato a priori o reso variabile con qualche regola) (per i dettagli vedi [7]).

Dal precedente sviluppo, una prima forma vettoriale dell'algoritmo l'LMS MIMO risulta allora

$$\begin{aligned} \mathbf{e}[n] &= \mathbf{d}[n] - \mathbf{W}_{n-1} \mathbf{x} \\ \mathbf{W}_n &= \mathbf{W}_{n-1} + \mu \mathbf{e}[n] \mathbf{x}^T. \end{aligned} \quad (23)$$

Si osservi che le precedenti espressioni ricorsive rappresentano l'algoritmo denominato *multiple-error LMS adaptive algorithm*, introdotto in [17] e ulteriormente analizzato e approfondito in [18] e [19].

3.2 Adattamento a banchi

Considerando l'espressione (19), lo sviluppo dell'algoritmo di adattamento è effettuato su Q banchi filtri supposti indipendenti, in altre parole la FC è espressa come

$$\hat{J}_{n-1}(\mathbf{W}) = [\hat{J}_{1,n-1}(\mathbf{w}_{1.}) \quad \hat{J}_{2,n-1}(\mathbf{w}_{2.}) \quad \dots \quad \hat{J}_{Q,n-1}(\mathbf{w}_{Q.})]^T. \quad (24)$$

differenziando la j -esima componente della precedente si ottiene

$$\nabla \hat{J}_{j,n-1} = \frac{\partial e_j^2[n]}{\partial \mathbf{w}_{j,n-1}} = -2 e_j[n] \mathbf{x} \quad (25)$$

dove $\nabla \hat{J}_{j,n-1} \in \mathbb{R}^{PM \times 1}$. Per l'adattamento possiamo scrivere

$$\begin{aligned} e_j[n] &= d_j[n] - \mathbf{w}_{j,n-1}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{w}_{j,n} &= \mathbf{w}_{j,n-1} + \mu e_j[n] \mathbf{x} \end{aligned} \quad j = 1, 2, \dots, Q \quad (26)$$

ognuno dei Q banchi è interpretato come un unico filtro di lunghezza pari a $(P \cdot M)$ con all'ingresso un segnale \mathbf{x} contenente, incolonnati, tutti gli ingressi \mathbf{x}_i per $i = 1, \dots, P$.

3.3 Adattamento dei singoli filtri

Dall'espressione dell'errore (20) la FC è definita come

$$\hat{\mathbf{J}}_{n-1}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} \hat{J}_{11,n-1}(\mathbf{w}_{12}) & \hat{J}_{12,n-1}(\mathbf{w}_{12}) & \cdots & \hat{J}_{1P,n-1}(\mathbf{w}_{1P}) \\ \hat{J}_{21,n-1}(\mathbf{w}_{21}) & \hat{J}_{22,n-1}(\mathbf{w}_{22}) & \cdots & \hat{J}_{2P,n-1}(\mathbf{w}_{1P}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{J}_{Q1,n-1}(\mathbf{w}_{Q1}) & \hat{J}_{Q1,n-1}(\mathbf{w}_{Q1}) & \cdots & \hat{J}_{QP,n-1}(\mathbf{w}_{1P}) \end{bmatrix} \quad (27)$$

Considerando l'elemento $\hat{J}_{ji,n-1}(\mathbf{w}_{ji})$ abbiamo che

$$\nabla \hat{J}_{ji,n-1} = \frac{\partial e_j^2[n]}{\partial \mathbf{w}_{ji,n-1}} = -2e_j[n]\mathbf{x}_i \quad (28)$$

dove $\nabla \hat{J}_{ij,n-1} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$. La regola di adattamento risulta

$$e_j[n] = d_j[n] - \sum_{i=1}^P \mathbf{x}_i^T \mathbf{w}_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, Q \quad (29)$$

$$\mathbf{w}_{ij,n} = \mathbf{w}_{ij,n-1} + \mu e_j[n]\mathbf{x}_i \quad i = 1, 2, \dots, P; \quad j = 1, 2, \dots, Q. \quad (30)$$

Essendo l'errore di uscita definito univocamente le formulazioni (23), (26) e (30) sono algebricamente del tutto equivalenti. Il lettore può, inoltre, facilmente verificare che usando la notazione composta 2, anche le espressioni di adattamento sono del tutto equivalenti.

4. Algoritmi LMS con adattamento ritardato

In molte applicazioni dell'LMS nel settore audio, come illustrato in Figura 2, i segnali di adattamento sono disponibili solo dopo un certo ritardo dovuto essenzialmente a un ulteriore percorso effettuato dal segnale di uscita del filtro prima di arrivare al nodo di confronto relativo alla specifica applicazione. Tale ritardo stabilisce un disallineamento temporale tra l'uscita del filtro e l'uscita desiderata che determina un degra-

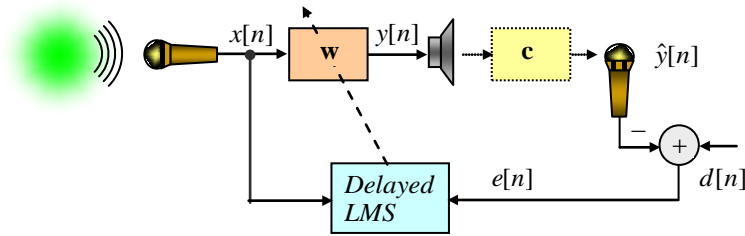


Figura 2 Esempio di tipico di schema con apprendimento ritardato a singolo canale

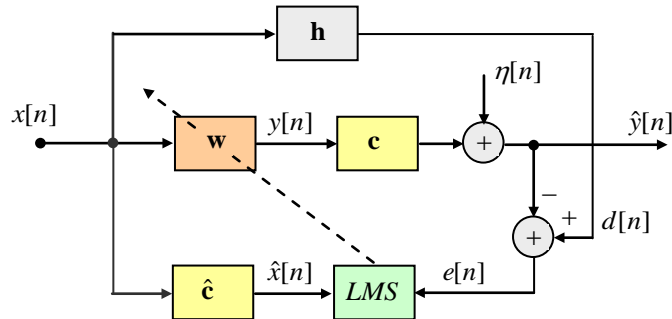


Figura 3 Schema a blocchi per l'identificazione del sistema $H(z)$, come prodotto tra $W(z)$ e $C(z)$, per la definizione degli algoritmi LMS ritardati.

Per la definizione degli algoritmi LMS con apprendimento ritardato, consideriamo il processo di identificazione del sistema dinamico con lo schema generale riportato in Figura 3. La FdT $H(z)$ del sistema dinamico da identificare è modellata come un filtro FIR caratterizzato dalla risposta impulsiva

$\mathbf{h} = [h[0] \ \cdots \ h[M_h - 1]]^T$. La FdT $C(z)$ del percorso aggiuntivo in uscita del filtro adattativo, è modellata con una risposta impulsiva FIR $\mathbf{c} = [c[0] \ \cdots \ c[M_c - 1]]^T$.

In alcune applicazioni come, per esempio, nella predistorsione [17]-[22], la FdT $C(z)$ indica il sistema fisico distorcitore da linearizzare o controllare. In altre situazioni il percorso dell'uscita desiderata è un semplice ritardo $H(z) = z^{-D}$. Nella cancellazione attiva del rumore [18], o più generalmente nel controllo attivo dell'acustica ambientale [21], la FdT $C(z)$ indica la funzione di trasferimento acustica (FTA) mentre la $H(z)$ rappresenta la FTA ottimale che si vuole ottenere.

4.1 Algoritmo LMS con aggiornamento ritardato (*Delayed LMS*)

L'algoritmo *Delayed LMS* (DLMS) [12]-[15], è definito da un percorso d'uscita caratterizzato con un ritardo puro $C(z) = z^{-D}$. Per il calcolo dell'errore l'uscita è disponibile dopo un ritardo D , $y[n] = \mathbf{x}_{n-D}^T \mathbf{w}_{n-D}$; risulta quindi

$$e[n] = d[n] - \mathbf{x}_{n-D}^T \mathbf{w}_{n-D} + \eta[n]. \quad (31)$$

Indicando con \hat{D} la stima del ritardo D , la regola di adattamento risulta

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu e[n] \mathbf{x}_{n-\hat{D}}. \quad (32)$$

Per l'analisi dell'algoritmo, procedendo come in [15], sostituendo la (31) in (32) per cui risulta

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu (d[n] \mathbf{x}_{n-\hat{D}} + \eta[n] \mathbf{x}_{n-\hat{D}} - \mathbf{x}_{n-\hat{D}} \mathbf{x}_{n-D}^T \mathbf{w}_{n-D}). \quad (33)$$

Per l'analisi delle prestazioni del DLMS eseguiamo l'aspettazione della precedente e, al fine di semplificare l'analisi, considerando vera l'ipotesi di indipendenza statistica tra i segnali coinvolti nel processo di adattamento per cui vale: $E(\eta[n] \mathbf{x}_{n-\hat{D}}) = 0$ e $E(\mathbf{x}_{n-\hat{D}} \mathbf{x}_{n-D}^T \mathbf{w}_{n-D}) \cong E(\mathbf{x}_{n-\hat{D}} \mathbf{x}_{n-D}^T) E(\mathbf{w}_{n-D})$. Dunque, l'equazione alle differenze stocastica per l'analisi delle prestazioni è definita come

$$E(\mathbf{w}_{n+1}) = E(\mathbf{w}_n) + \mu \mathbf{g}_{n-\hat{D}} - \mathbf{R}_{D-\hat{D}} E(\mathbf{w}_{n-D}) \quad (34)$$

in cui $\mathbf{R}_{D-\hat{D}} = E(\mathbf{x}_{n-\hat{D}} \mathbf{x}_{n-D}^T)$, $\mathbf{g}_{n-\hat{D}} = E(d[n] \mathbf{x}_{n-\hat{D}})$.

Per l'analisi della convergenza si può procedere analogamente all'LMS standard [7]. Si dimostra (vedi [15] per i dettagli) che in caso di stima perfetta del ritardo, ovvero $D \equiv \hat{D}$, si ha convergenza all'ottimo per

$$0 < \mu < 2 / \left(2(D+1) \lambda_{\max} + \sum_{i=0}^{M-1} \lambda_i \right). \quad (35)$$

4.2 Algoritmo Filtered-X LMS

Nel caso di esistenza di una funzione di trasferimento nel percorso dell'errore, uno degli algoritmi più diffusi è quello denominato *Filtered-X LMS* (FX-LMS) [16]-[17], [23]. Per l'adattamento occorre eseguire una stima della FdT $\hat{C}(z)$: l'appellativo '*filtered-X*' deriva proprio dal fatto che, per compiere l'adattamento, l'ingresso è filtrato dalla FdT stimata $\hat{C}(z)$.

Considerando che il modello del percorso $C(z)$ di tipo FIR è caratterizzato dalla risposta impulsiva \mathbf{c} , l'errore in uscita è definito come

$$e[n] = d[n] - \mathbf{c}^T \mathbf{y}_n. \quad (36)$$

Detto $\hat{\mathbf{x}}[n] = \hat{\mathbf{c}}^T \mathbf{x}_n$ e $\hat{\mathbf{x}}_n = [\hat{x}[n] \ \cdots \ \hat{x}[n-M+1]]^T$, per l'aggiornamento vale

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu e[n] \hat{\mathbf{x}}_n. \quad (37)$$

Si osservi che, in questo caso, l'aggiornamento dei pesi \mathbf{w} dipende anche dalla risposta impulsiva elettroacustica \mathbf{c} .

Per l'analisi delle prestazioni si può procedere come nel DLMS basandosi sull'ipotesi di indipendenza dei processi. Si rileva che le prestazioni dell'algoritmo sono fortemente sensibili alla bontà della stima del percorso $C(z)$. Lo sviluppo teorico è piuttosto complesso e per approfondimenti sulla convergenza debole e quadratica si rimanda alla letteratura [18]-[25].

4.3 Operatore di filtraggio a tempo discreto, singolo e multicanale

Prima di procedere alla descrizione dei prossimi algoritmi di adattamento è introdotta una rappresentazione più compatta e anche più efficace per alcuni sviluppi teorici. In alcune situazioni è più conveniente rappresentare un filtro numerico FIR come un operatore matematico a tempo discreto di seguito definito.

Definizione

Indicando con q^{-1} l'operatore di ritardo unitario e con q^{+1} l'operatore unitario di anticipo, si definisce *operatore di filtraggio* nel tempo discreto, indicato come $W^{q^{-1}}(\cdot)$ e rappresentato in Figura 4, il percorso nel dominio del tempo della FdT $W(z)$ tale che valgono le seguenti relazioni

$$y[n] = W^{q^{-1}}(x[n]) \quad (38)$$

nel caso in ingresso sia presente una sequenza \mathbf{x}_n vale, per definizione, la notazione

$$\mathbf{y}_n = W^{q^{-1}}(\mathbf{x}_n). \quad (39)$$

L'estensione al caso multicanale è tale che se in ingresso è presente uno snap-shot $\mathbf{x}[n]$ in uscita abbiamo

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{W}_{PQ}^{q^{-1}}\{\mathbf{x}[n]\}. \quad (40)$$

Nel caso in ingresso sia presente una matrice di segnale contenente gli snap-shot di una finestra temporale di lunghezza N , ovvero $\mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^{1(N) \times P} = [\mathbf{x}_{1n} \ \mathbf{x}_{2n} \ \dots \ \mathbf{x}_{Pn}]_{1 \times P}$ per l'uscita risulta

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{W}_{QP}^{q^{-1}}(\mathbf{X}_n). \quad (41)$$

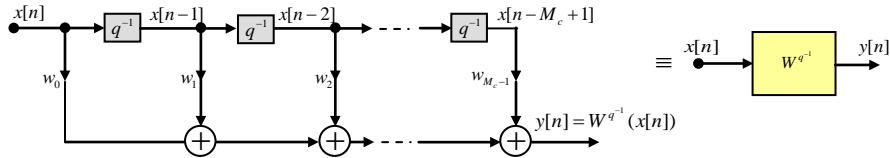


Figura 4 Rappresentazione FdT con operatore matematico di filtraggio $W^{q^{-1}}(\cdot)$.

4.4 LMS con rete aggiunta (Adjoint LMS)

L'algoritmo *adjoint LMS* (AD-LMS), sviluppato da Wan in [26], rappresenta un modo alternativo, e nel caso a singolo canale del tutto equivalente, all'implementazione dell'FX-LMS.

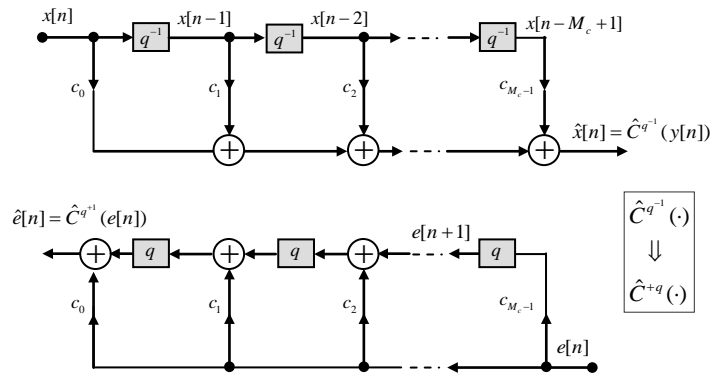


Figura 5 Modello FIR di lunghezza M_c del percorso acustico e corrispondente rete aggiunta.

L'AD-LMS sfrutta la linearità e la definizione circuitale di 'rete aggiunta'. Per la presentazione dell'algoritmo, come proposto dall'autore in [26], procediamo rappresentando il percorso $C(z)$ con l'operatore di filtraggio a tempo discreto $C^{q^{-1}}(\cdot)$. Con tale formalismo l'errore di uscita (36) è riscritto nel dominio del tempo come $e[n] = d[n] - C^{q^{-1}}(y[n])$ e l'aggiornamento (37) dell'FX-LMS è riscritto come

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu e[n] \hat{\mathbf{C}}^{q-1}(\mathbf{x}_n). \quad (42)$$

Definizione

Dato un circuito TD definito da un grafo \mathcal{G} , si definisce *rete aggiunta* il circuito il cui grafo è determinato da \mathcal{G} con le seguenti modifiche: 1) i versi dei percorsi sono invertiti; 2) i nodi giunzione sono commutati con i nodi somma; 3) gli elementi di ritardo sono sostituiti con elementi di anticipo. In Figura 5, è riportato il grafo di un filtro FIR e della relativa rete aggiunta.

Usando il paradigma della rete aggiunta la regola di aggiornamento (42) può essere riscritta come

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{n+1} &= \mathbf{w}_n + \mu \hat{e}[n - M_c] \mathbf{x}_{n - M_c} \\ \hat{e}[n] &= \hat{\mathbf{C}}^{+q}(e[n]). \end{aligned} \quad (43)$$

Si osservi che nella precedente espressione è filtrato il segnale di errore $e[n]$ piuttosto che l'ingresso come nella (42). Il metodo è generale e può essere esteso anche a percorsi modellati con strutture a traliccio e IIR. Il filtro di errore definito dalla rete aggiunta è caratterizzato dall'operatore non causale $\hat{\mathbf{C}}^{+q}(\cdot)$. Come conseguenza della non causalità, per la realizzabilità on-line dell'algoritmo, occorre allineare le sequenze introducendo un ritardo pari alla lunghezza M_c del filtro.

Si osservi che, nel caso mono dimensionale, gli algoritmi descritti dalla (42) e (43) sono caratterizzati dalla stessa complessità computazionale e hanno prestazioni pressoché identiche [26].

4.5 Algoritmo FX-LMS multicanale in notazione composita 2

Con la notazione composita 2 lo *snapshot* di uscita $\mathbf{y}[n] \in \mathbb{R}^{Q \times 1}$ del filtro è espresso come $\mathbf{y}[n] = \mathbf{X}^T \mathbf{w}$ ovvero, $\mathbf{y}[n] = \mathbf{x} \odot \mathbf{w}$. Detta \mathbf{C} la matrice del percorso MIMO a valle del filtro adattativo

$$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{L \times Q(M_c)} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{11}^T & \mathbf{c}_{12}^T & \cdots & \mathbf{c}_{1Q}^T \\ \mathbf{c}_{21}^T & \mathbf{c}_{22}^T & \cdots & \mathbf{c}_{2Q}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{c}_{L1}^T & \mathbf{c}_{L2}^T & \cdots & \mathbf{c}_{LQ}^T \end{bmatrix}_{L \times Q} \quad (44)$$

tale che ogni suo elemento è un vettore riga che contiene le singole risposte impulsive elettroacustiche $\mathbf{c}_{ij}^T \in \mathbb{R}^{1 \times M_c}$, lo *snapshot* di uscita dal percorso \mathbf{C} , in notazione composita 2, risulta

$$\hat{\mathbf{y}}[n] \in \mathbb{R}^{L \times 1} = \mathbf{Y}^T \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} * \mathbf{c}_{1:} \\ \mathbf{y} * \mathbf{c}_{2:} \\ \vdots \\ \mathbf{y} * \mathbf{c}_{L:} \end{bmatrix}_{L \times 1} = \mathbf{y} \odot \mathbf{c}$$

dove il vettore \mathbf{c} è formato da tutte le righe della matrice \mathbf{C} incolonnate

$$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{(QM_c) \times 1} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1:} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{L:} \end{bmatrix}_{L \times 1} \quad (45)$$

ossia, $\mathbf{c}_{j:} \in \mathbb{R}^{QM_c \times 1} \triangleq [\mathbf{c}_{j1}^T \quad \mathbf{c}_{j2}^T \quad \cdots \quad \mathbf{c}_{jL}^T]^T$ e la matrice composita dei dati $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{(QM_c) \times L}$ è definita come

$$\mathbf{Y}^T \in \mathbb{R}^{L \times L(QM_c)} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{y}^T & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{y}^T \end{bmatrix}_{L \times L} \quad (46)$$

ovvero, \mathbf{Y} è una matrice $L \times L$ dove ogni elemento della diagonale $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{QM_c \times 1}$ contiene, tutti incolonnati, i campioni delle delay line dei filtri $\mathbf{c}_{1:}$, $\mathbf{c}_{2:}$, ..., $\mathbf{c}_{L:}$.

Definiamo la matrice del percorso stimato $\hat{\mathbf{C}}$ come

$$\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{L \times P(M_c)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}}_{11}^T & \hat{\mathbf{c}}_{12}^T & \cdots & \hat{\mathbf{c}}_{1P}^T \\ \hat{\mathbf{c}}_{21}^T & \hat{\mathbf{c}}_{22}^T & \cdots & \hat{\mathbf{c}}_{2P}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{c}}_{L1}^T & \hat{\mathbf{c}}_{L2}^T & \cdots & \hat{\mathbf{c}}_{LP}^T \end{bmatrix}_{L \times P} . \quad (47)$$

La matrice di dati in uscita del percorso stimato $\hat{\mathbf{C}}$ ha la forma

$$\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{C}} \odot \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}}_{11}^T & \hat{\mathbf{c}}_{12}^T & \cdots & \hat{\mathbf{c}}_{1P}^T \\ \hat{\mathbf{c}}_{21}^T & \hat{\mathbf{c}}_{22}^T & \cdots & \hat{\mathbf{c}}_{2P}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{c}}_{L1}^T & \hat{\mathbf{c}}_{L2}^T & \cdots & \hat{\mathbf{c}}_{LP}^T \end{bmatrix}_{L \times P} \odot \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1 & \mathbf{x}'_2 & \cdots & \mathbf{x}'_P \\ \mathbf{x}'_1 & \mathbf{x}'_2 & \cdots & \mathbf{x}'_P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}'_1 & \mathbf{x}'_2 & \cdots & \mathbf{x}'_P \end{bmatrix}_{L \times P} \quad (48)$$

dove \odot è definito come la convoluzione di Kronecker. Il simbolo \odot indica che ogni elemento ij della matrice $\hat{\mathbf{X}}$ è la convoluzione tra gli elementi ij delle matrici $\hat{\mathbf{C}}$ e \mathbf{X}' . Detta $\hat{\mathbf{c}}_{ij} \in \mathbb{R}^{M_c \times 1}$ la risposta impulsiva del percorso stimato tra l'ingresso i e l'uscita j , con $\mathbf{X}' \in \mathbb{R}^{L(N_c) \times P}$ si indica la matrice in cui ogni elemento della i -esima colonna, contiene un blocco di segnale $\hat{\mathbf{x}}'_i \in \mathbb{R}^{N_c \times 1}$, di opportuna lunghezza N_c , relativo a $\hat{\mathbf{c}}_{ij}$ per ogni j . Definendo la convoluzione tra $\hat{\mathbf{c}}_{ij}$ e $\hat{\mathbf{x}}'_i$ come $\hat{\mathbf{x}}'_{ji} = \hat{\mathbf{c}}_{ij} * \hat{\mathbf{x}}'_i$ per cui $\hat{\mathbf{x}}'_i \in \mathbb{R}^{(M_c + N_c - 1) \times 1}$, la (48) è scritta come

$$\hat{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{(N_c + M_c - 1)L \times P} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}}_{11} * \hat{\mathbf{x}}'_1 & \hat{\mathbf{c}}_{12} * \hat{\mathbf{x}}'_2 & \cdots & \hat{\mathbf{c}}_{1P} * \hat{\mathbf{x}}'_P \\ \hat{\mathbf{c}}_{21} * \hat{\mathbf{x}}'_1 & \hat{\mathbf{c}}_{22} * \hat{\mathbf{x}}'_2 & \cdots & \hat{\mathbf{c}}_{2P} * \hat{\mathbf{x}}'_P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{c}}_{L1} * \hat{\mathbf{x}}'_1 & \hat{\mathbf{c}}_{L2} * \hat{\mathbf{x}}'_2 & \cdots & \hat{\mathbf{c}}_{LP} * \hat{\mathbf{x}}'_P \end{bmatrix}_{L \times P} . \quad (49)$$

La relazione di adattamento può essere definita estendendo al caso MIMO quella dell'aggiornamento FX-LMS SISO (37), per cui il gradiente, considerando la notazione composita 2, è pari a $\Delta \hat{\mathbf{J}}_n^2 = -\hat{\mathbf{X}}_n \mathbf{e}[n]$, ovvero

$$\mathbf{e}[n] = \mathbf{d}[n] + \hat{\mathbf{y}}[n] \quad (50)$$

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_{n-1} + \mu \hat{\mathbf{X}}_n \mathbf{e}[n] . \quad (51)$$

Riscrivendo la (51) indicando espressamente le dimensioni dei vettori e delle matrici

$$\mathbf{w}_n \underset{(PM)Q \times 1}{=} \mathbf{w}_{n-1} \underset{(PM)Q \times 1}{=} + \mu \cdot \underset{[(N_c + M_c - 1)L \times P]}{\hat{\mathbf{X}}_n} \cdot \underset{(L \times 1)}{\mathbf{e}[n]} \quad (52)$$

osserviamo che, per la calcolabilità del prodotto $\hat{\mathbf{X}}_n \mathbf{e}[n]$, è necessario che il numero di colonne di $\hat{\mathbf{X}}_n$ sia pari alle righe di $\mathbf{e}[n]$, ossia, $P \equiv L$. In questo caso, per la calcolabilità della somma, risulta che occorre $(PM)Q \equiv (N_c + M_c - 1)P$ per cui, la lunghezza del blocco dati in ingresso al filtro MIMO $\hat{\mathbf{C}}$ deve essere pari a $N_c = MQ - M_c + 1$

4.6 Algoritmo FX-LMS multicanale in notazione composita 1

Nella notazione composita 1, lo snap-shot di uscita $\mathbf{y}[n] \in \mathbb{R}^{Q \times 1}$ (vedi (5)) è $\mathbf{y}[n] = \mathbf{W}\mathbf{x}$. La regola di adattamento dei pesi del filtro risulta $\Delta \hat{\mathbf{J}}_n^1 = -\mathbf{e}[n]\hat{\mathbf{x}}_n^T$, ovvero

$$\mathbf{W}_n = \mathbf{W}_{n-1} + \mu \mathbf{e}[n]\hat{\mathbf{x}}_n^T . \quad (53)$$

Dove il vettore dati $\hat{\mathbf{x}}_n \in \mathbb{R}^{(N_c \times 1)}$ è costruito come il vettore di tutte le convoluzioni $\hat{\mathbf{x}}'_i * \hat{\mathbf{c}}_{ij}$ (tra gli ingressi $\hat{\mathbf{x}}'_i \in \mathbb{R}^{N_c \times 1}$ e le risposte impulsive $\hat{\mathbf{c}}_{ij} \in \mathbb{R}^{M_c \times 1}$ per $j = 1, \dots, L$), tutte incolonnate, e dove ogni convoluzione ha lunghezza pari $(N_c + M_c - 1)$. Formalmente

$$\hat{\mathbf{x}}_n \in \mathbb{R}^{LP(N_c+M_c-1) \times 1} = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc} [\hat{\mathbf{c}}_{11} * \hat{\mathbf{x}}'_1]^T & [\hat{\mathbf{c}}_{12} * \hat{\mathbf{x}}'_2]^T & \cdots & [\hat{\mathbf{c}}_{1P} * \hat{\mathbf{x}}'_P]^T \end{array} \right]^T \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{ccc} [\hat{\mathbf{c}}_{L1} * \hat{\mathbf{x}}'_1]^T & [\hat{\mathbf{c}}_{L2} * \hat{\mathbf{x}}'_2]^T & \cdots & [\hat{\mathbf{c}}_{LP} * \hat{\mathbf{x}}'_P]^T \end{array} \right]^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{x}}'_{11} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}'_{1P} \end{array} \right]^T \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{x}}'_{L1} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}'_{LP} \end{array} \right]^T \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Per cui la lunghezza del vettore $\hat{\mathbf{x}}_n$ è pari a $LP(N_c + M_c - 1)$. Infatti, riscrivendo la (53), indicando le dimensioni dei vettori e delle matrici, abbiamo che

$$\mathbf{W}_n \underset{[Q \times P(M)]}{=} = \mathbf{W}_{n-1} \underset{[Q \times P(M)]}{+} \mu \cdot \mathbf{e}[n] \underset{(L \times 1)}{\cdot} \hat{\mathbf{x}}_n^T \underset{[1 \times LP(N_c + M_c - 1)]}{}. \quad (55)$$

Per la consistenza del prodotto matriciale è necessario che $Q \equiv L$ e $P(M) \equiv Q[P(N_c + M_c - 1)]$. Ne segue che la lunghezza del blocco di segnale all'ingresso sia pari a $N_c = (M/Q) - M_c + 1$.

Si osservi che le formulazioni composite 1 e 2, pur essendo algebricamente equivalenti, hanno un costo computazionale differente. Dalla (55) per il calcolo del gradiente stimato nella forma composta 1 $\Delta \hat{\mathbf{J}}_n^1 = -\mathbf{e}[n] \hat{\mathbf{x}}_n^T$ per $Q = L$ sono necessarie $Q \times QP(N_c + M_c - 1)$ moltiplicazioni. La lunghezza necessaria del buffer d'ingresso è pari a $N_c = (M/Q) - M_c + 1$, per cui risulta un costo computazionale complessivo pari a MQP .

Con analogo ragionamento, dalla (52) per il calcolo di $\Delta \hat{\mathbf{J}}_n^2 = -\hat{\mathbf{X}}_n \mathbf{e}[n]$ per $P = L$ sono necessarie $(N_c + M_c - 1)P^3$ per cui con la lunghezza necessario del buffer d'ingresso, pari a $N_c = MQ - M_c + 1$, risulta un costo computazionale complessivo pari MQP^3 .

4.7 FX-LMS MIMO in notazione con operatori di ritardo multicanale

La notazione FX-LMS MIMO risulta semplificata considerando il formalismo con gli operatori di filtraggio. Si osservi che componendo gli operatori, l'uscita dell'intero sistema può essere scritta come $\hat{\mathbf{y}}[n] = \mathbf{C}_{LQ}^{q-1} \left[\mathbf{W}_{QP}^{q-1} \{ \mathbf{x}[n] \} \right]$.

La relazione di adattamento (53) per $Q = L$, può essere scritta come

$$\mathbf{e}[n] = \mathbf{d}[n] - \hat{\mathbf{y}}[n] \quad (56)$$

$$\mathbf{W}_n = \mathbf{W}_{n-1} + \mu \mathbf{e}[n] \cdot \left[\mathbf{C}_{QP}^{q-1} \{ \mathbf{x}'_n \} \right]^T. \quad (57)$$

4.8 AD-LMS multicanale

Considerando l'AD-LMS multicanale, l'algoritmo di adattamento può essere implementato più semplicemente nella seguente modalità

$$\mathbf{e}[n] = \mathbf{d}[n] - \mathbf{C}_{LQ}^{q-1} \{ \mathbf{y}[n] \} \quad (58)$$

$$\hat{\mathbf{e}}[n] = \hat{\mathbf{C}}_{QL}^q (\mathbf{e}[n]) \quad (59)$$

$$\mathbf{W}_n = \mathbf{W}_{n-1} + \mu \hat{\mathbf{e}}[n - M_c] \mathbf{x}_{n-M_c}^T. \quad (60)$$

Si noti che l'errore di uscita $\mathbf{e}[n]$ ha dimensione L mentre l'errore $\hat{\mathbf{e}}[n]$, dopo il filtraggio multicanale con l'operatore $\hat{\mathbf{C}}_{QL}^q(\cdot)$, ha dimensione Q per cui per la correttezza dimensionale, occorre che $L = Q$.

Si osservi che l'algoritmo AD-LMS multicanale, ha una complessità simile all'FX-LMS nella forma composta 1. Per il calcolo del gradiente stimato $\Delta \hat{\mathbf{J}}_n^{ADLMS} = -\mathbf{e}[n] \mathbf{x}_{n-M_c}^T$, risulta un costo computazionale complessivo pari MQP .

5. Risultati sperimentali e conclusioni

Mettiamo ora a confronto i metodi FX-LMS e AD-LMS in un'applicazione di equalizzazione multi punto. Facendo riferimento alla Figura 6, consideriamo un semplice scenario composto da due sorgenti e due sensori che danno origine a 4 diverse risposte impulsive. La matrice \mathbf{C} rappresenta il percorso acustico in aria mentre $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ (per semplicità) rappresenta la risposta desiderata del sistema.

In Figura 7 vengono mostrati i diversi percorsi \mathbf{C} con le rispettive stime $\hat{\mathbf{C}}$. Il segnale proveniente dalle diverse fonti si propaga attraverso i percorsi primari e si somma sui due sensori; il segnale di errore generato da essi viene prima filtrato secondo la modalità della rete aggiunta, per poi procedere al controllo adattativo e all'aggiornamento dei pesi del filtro. Procediamo al controllo del rumore utilizzando dapprima l'algoritmo FX-LMS MIMO e poi l'Adjoint LMS MIMO, mettendo a confronto i risultati.

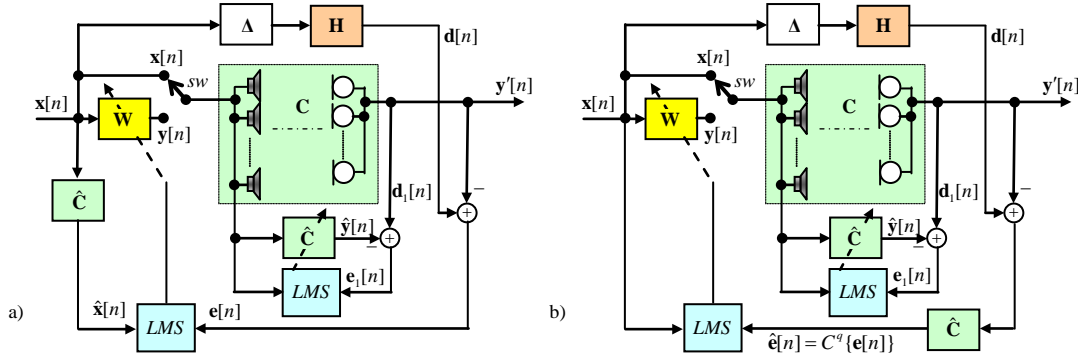


Figura 6 Architetture di adattamento MIMO usate per gli esperimenti: a) Filtered-X LMS; b) Adjoint LMS.

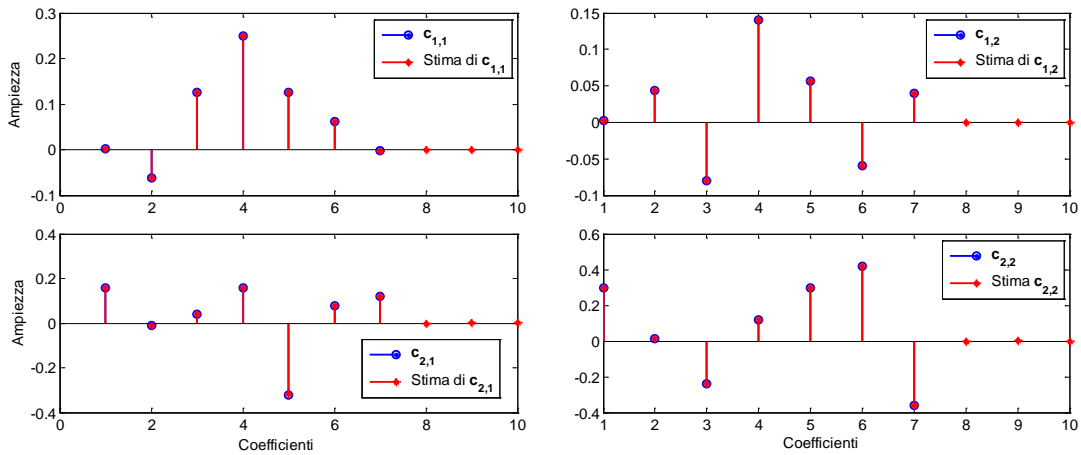


Figura 7 Stima dei coefficienti dei percorsi acustici \mathbf{C} .

Com'è possibile vedere dai grafici in Figura 8 e Figura 9, i risultati ottenuti attraverso i due approcci FX-LMS e AD-LMS sono in pratica sovrapponibili, con un andamento a regime leggermente migliore per l'AD-LMS. La similarità nelle prestazioni è rappresentata anche in Figura 10, in cui vengono confrontati i *mean square error* delle tecniche descritte per ciascun segnale di errore.

Come mostrato, l'algoritmo Adjoint LMS si presta a diventare un valido sostituto del diffusissimo FX-LMS, garantendo prestazioni molto simili, se non migliori, e offrendo un significativo guadagno computazionale e semplicità d'implementazione.

Da osservare, infine, che nei sistemi FX-LMS, implementati con le diverse forme composite, occorre tenere sotto controllo i vincoli di dimensione (numero delle sorgenti, degli altoparlanti e dei microfoni). In caso di dimensionalità diverse, l'AD-LMS dimostra di essere la metodologia che consente una maggiore flessibilità implementativa ed un minore costo computazionale di adattamento.

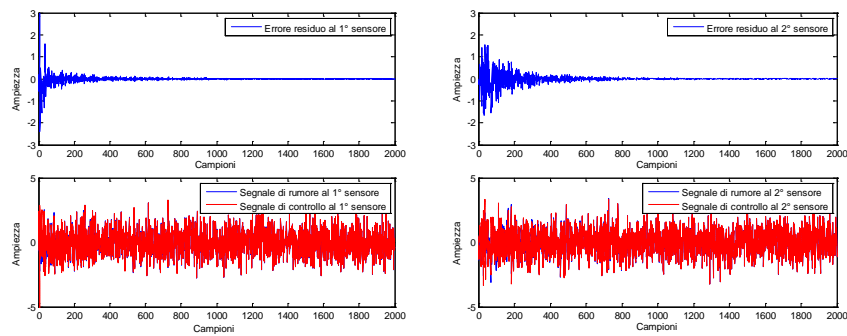


Figura 8 Errore residuo tramite FX-LMS MIMO.

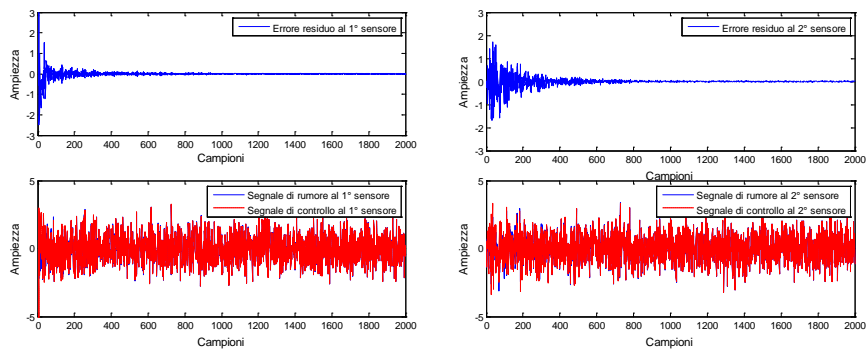


Figura 9 Errore residuo tramite AD-LMS MIMO.

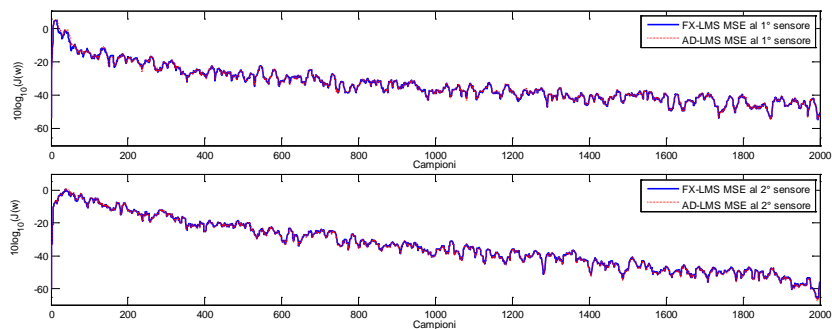


Figura 10 Confronto prestazionale delle due tecniche MIMO FX-LMS e AD-LMS.

6. Bibliografia

- [1] S. J. Elliott and P. A. Nelson, "Multiple-Point Equalization in Room Using Adaptive Digital Filters," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 37, pp. 899–907, November 1989.
- [2] P. A. Nelson, F.O. Bustamante, "Multichannel Signal Processing Techniques in the Reproduction of Sound," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 44, No. 11, pp. 973 – 989, November 1996.
- [3] Y. Huang, J. Chen, and J. Benesty, "Immersive Audio Scheme", *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 28, issue 1, pp. 20-32, January 2011.
- [4] P. A. Gauthier, A. Berry, "Adaptive Wave Field Synthesis for Sound Field Reproduction: Theory, Experiments, and Future Perspectives," *J. Audio Eng. Soc.*, Vol. 55, No. 12, December 2007.
- [5] E. Corteel, "Equalization in an Extended Area Using Multichannel Inversion and Wave Field Synthesis," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 54, pp. 1140–1161, December 2006.

- [6] L. Fuster, J. J. Lopez, A. Gonzalez, and P. D. Zuccarello, "Room Compensation Using Multichannel Inverse Filters for Wavefield Synthesis Systems," presented at the 118th Convention of the Audio Engineering Society, J. Audio Eng. Soc. , vol. 53, No. 6401, pp. 686 July/Aug 2005.
- [7] D. Renzi, R. Parisi, A. Uncini, "Weighted Soundfield Synthesis: A Perceptual Approach", AES Italian Annual Meeting, Como, Paper: 05001, November 2005.
- [8] A. Uncini, "Elaborazione adattativa dei segnali", Aracne Ed., ISBN: 978-88-548-3142-1, 2010.
- [9] Y. Huang, J. Benesty, J. Chen, "Acoustic MIMO Signal Processing," Springer, Series: Signals and Communication Technology, ISBN: 978-3-540-37630-9, 2006.
- [10] J. Garas, "Adaptive 3D Sound Systems", PhD dissertation, Eindhoven University of Technology, The Netherlands, ISBN 90-386-1640-6, September 1999.
- [11] M. Bouchard and S. Quednau, "Multichannel recursive-least squares algorithms and fast-transversal-filter algorithms for active noise control and sound reproduction systems," IEEE Transactions on Speech and Audio Processing, Vol. 8, No. 5, pp. 606–618, 2000.
- [12] G. Long, F. Ling and J. Proakis, "The LMS with delayed Coefficient adaptation", IEEE Trans. on Acoustics, Speech, und Signal Processing, Vol. 37, pp. 1397-1405, Sept. 1989.
- [13] G. Long, F. Ling and J. Proakis, "Corrections to The LMS with delayed coefficient adaptation," IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 40, pp. 230-232, Jan. 1992.
- [14] M. Rupp and R. Frenzel. "Analysis of LMS and NLMS algorithms with delayed coefficient update under the presence of spherically invariant processes," IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 42, pp. 668-672, March 1994.
- [15] O.J. Tobias, J.C.M. Bermudez, N.J. Bershad, "Stochastic analysis of the delayed LMS algorithm for a new model," Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP '00. Vol. 1, pp 404 – 407, 15-9 June 2000.
- [16] D. R. Morgan, "An analysis of multiple correlation cancellation loops with a filter in the auxiliary path," IEEE Trans Acoustic, Speech, Signal Processing, vol. ASSP-28, no 4, pp 454-467, Aug. 1980.
- [17] S. J. Elliott, I. M. Stothers, P. A. Nelson, "A multiple error LMS algorithm and its application to the active control of sound and vibration," IEEE Trans. Acoustic, Speech, Signal Processing, vol. ASSP-35, no. 10, pp. 1423-1434, Oct. 1987.
- [18] S. Douglas and W. Pan, "Exact expectation analysis of the LMS adaptive filter," IEEE Trans. Signal Processing, vol. 43, pp. 2863–2871, Dec. 1995.
- [19] S. Douglas, "Analysis of the multiple-error and block least-mean-square adaptive algorithms," IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, Vol. 42. NO. 2, pp. 9 – 101, February 1995.
- [20] P. A. Nelson and S. J. Elliott, "Active Control of Sound. London," U.K., Academic, 1994.
- [21] S. M. Kuo, D. R. Morgan, "Active Noise Control Systems: Algorithms and DSP Implementations," Wiley Series in Telecommunications and Signal Processing, ISBN 0-471-13424-4, 1996.
- [22] S. D. Snyder and C. H. Hansen, "Effect of transfer function estimation errors on the filtered-X LMS algorithm," IEEE Trans. Signal Process., vol. 42, no. 4, pp. 950–953, Apr. 1994.
- [23] E. Bjarnason, "Analysis of the Filtered-X LMS algorithm," IEEE Trans. Speech Audio Processing, vol. 3, pp. 504–514, Nov. 1995.
- [24] C. C. Boucher, S. J. Elliott, and P. A. Nelson, "Effect of errors in the plant model on the performance of algorithms for adaptive feed forward control" Proc. Inst. Elect. Eng. F, vol. 138, pp. 313–319, Aug. 1991.
- [25] O.J. Tobias, J.C.M. Bermudez, N.J. Bershad, "Mean Weight Behavior of the Filtered-X LMS Algorithm," IEEE Trans. Signal Processing, vol. 48, pp. 1061–1075, April 2000.
- [26] E. A. Wan, "Adjoint LMS: an efficient alternative to the filtered-X LMS and multiple error LMS algorithms," in Proc. IEEE ICASSP-1996, pp. 1842–1845, 1996.
- [27] M. Miyoshi and Y. Kaneda, "Inverse Filtering of Room Acoustics," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process., vol. 36, pp. 145–152, February 1988.